Title	Shift-Commutative Linear Operators and Random Processes (多重マルコフ性と予測理論への応用)
Author(s)	瀬口, 常民
Citation	数理解析研究所講究録 (1972), 151: 159-176
Issue Date	1972-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/106794
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
151 巻 1972 年 159-176

Shift-commutative linear operators and random processes

九大 教養　瀬口常民

0. まえがき

この報告は，研究途中で未だ不完全な結果であるが，問題提起にもなるかと思い，発表する．

報告者は〔4〕,〔5〕,〔6〕で，S-C.L.Op.という線型空間上の線型作用素のクラスを定義し，それに関連した主として定常過程の性質を研究した．その頃から，McKean，Levinson，Dym，飛田氏たちの，splitting field や多重マルコフ性の研究と報告者の研究との関連について検討していた．最近，岡部氏の多重マルコフ性の研究成果を知って，両者の関連が明確になるとともに，報告者のこれまでの研究結果を補うべき部分もはっきりしてきたので，それらの点を指摘しながら，表題の問題について紹介したい．

1. Shift と可換な線型作用素の定義とそのクラス $\mathfrak{X}$

$\mathbb{F}$を線型空間，$\{T_t\}_{t\in R}$を$\mathbb{F}$上のshift，つまり

$$T_t : \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F},$$

$$T_{t+s} = T_t T_s, \quad T_0 = I$$

をみたす変換とする。ここでは径数tを実数全体の集合Rを動くと考えるが，径数空間はRとは限らず，整数全体の集合Zでも，或る加群であってもよい。

定義 1.1　$(\Lambda, \mathbb{D}, \{T_t\})$が，条件

(1)　$\mathbb{D}$は$\mathbb{F}$の部分空間で，次の（L 1）をみたす：

（L 1）　$T_t\mathbb{D} \subset \mathbb{D}$，　$(t \in R)$，

(2)　Λは$\mathbb{D}$上の線型作用素で，次の（L 2）をみたす：

（L 2）　$\Lambda\mathbb{D} \subset \mathbb{F}$，

(3)　ΛとT_tとは可換である，すなわち

（L 3）　$T_t\Lambda = \Lambda T_t$，　$(t \in R)$

をみたすとき，Λを（$\{T_t\}$に関する$\mathbb{D}$上の）shiftと可換な線型作用素（shift-commutative linear operator，S-C.L.Op.と略記する）という。

この節でこれから取扱うS-C.L.Op. Λは，次のようなクラスに限る：

（F 1）　$\mathbb{F}$はR上の複素数値関数の全体。

（F 2）　shiftは平行移動　$\tau_t f(\cdot) \equiv f(\cdot + t)$.

（F 3）　Λは，$\Lambda\Gamma=\Gamma\Lambda$で，$\Lambda e^{z\cdot}$が定義できる$z\in C$が存在する．（$C$は複素数全体の集合を表わす．）

このようなS-C.L.Op.の全体を$\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$で表わし，$\Lambda\in\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$の定義域を$\tilde{\mathfrak{D}}(\Lambda)$で表わすことにする．

$$\Lambda f(t)\equiv(\Lambda f)(t)=\tau_t[(\Lambda f)(0)]=[\Lambda(\tau_t f)](0)$$

が成り立つことから，次の補題がえられる．

補題 1.1　任意の$\Lambda\in\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$，$e^{z\cdot}\in\tilde{\mathfrak{D}}(\Lambda)$に対して

$$\Lambda e^{zt}=e^{zt}C_\Lambda(z)\qquad(t\in R)$$

をみたすC_Λが存在する．

定義 1.2　補題1.1の関数C_ΛをΛの特性関数（characterizing function, c.f.と略記する）という．C_Λの定義域を$\mathfrak{a}(\Lambda)$と書く．すなわち$\mathfrak{a}(\Lambda)=\{z\,;\,e^{z\cdot}\in\tilde{\mathfrak{D}}(\Lambda)\}$である．

$\Lambda\in\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$の逆作用素$\Lambda^{-1}$を，$\Lambda\Lambda^{-1}=\Lambda^{-1}\Lambda=I$で定義してもよいが，関数方程式やこの後のことを考慮して，次のように定義する．

定義 1.3　$\Lambda\in\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$に対して$\Gamma\in\tilde{\boldsymbol{\Lambda}}$が ① $\overline{\mathfrak{a}(\Lambda)}=\overline{\mathfrak{a}(\Gamma)}=C$．② C_Λのk_0次の零点はC_Γのk_0次の極，C_Λのk_1次の極はC_Γのk_1次の零点である．③ C_Λ（C_Γ）は虚軸上に零点も極ももたない．④ $z\in\mathfrak{a}(\Lambda)\cap\mathfrak{a}(\Gamma)$に対して$C_\Gamma(z)=1/C_\Lambda(z)$をみたすとき，$\Gamma$を$\Lambda$の逆作用素といい，$\Gamma=\Lambda^{-1}$と書く．

S-C.L.Op.の性質として，次の補題は今後の議論をすすめる

のに有効である．（証明は省略する．）

<u>補題 1.2</u>　$\Lambda, \Gamma, \Delta \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ に対して，

$$\Delta = a\Lambda + b\Gamma \quad \text{ならば} \quad C_\Delta = aC_\Lambda + bC_\Gamma,$$

$$\Delta = \Lambda\Gamma \quad \text{ならば} \quad C_\Delta = C_\Lambda C_\Gamma$$

$$\Lambda^{-1}\text{が存在する} \quad \text{ならば} \quad C_{\Lambda^{-1}} = 1/C_\Lambda.$$

これからの議論の有効な素材となる<u>いくつかの例</u>を挙げる．

〔1°〕<u>クラス $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_s$</u>

K を有限個の飛躍点をもつ階段関数とする，すなわち

(1.1)　$$K(t) = \sum_{t_n \leq t} k_n, \qquad k_n \in C.$$

このとき，任意の $f \in \mathbb{F}$ に対して

(1.2)　$$\Lambda f(\cdot) \equiv \sum_n \tau_{t_n} f(\cdot) k_n = \sum_n f(\cdot + t_n) k_n$$

は S-C.L.Op. で，その c.f. は

$$C_\Lambda(z) = \sum_n e^{zt_n} k_n, \qquad z \in C$$

である．このような S-C.L.Op. の全体を $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_s$ と書くことにする．

〔2°〕<u>微分作用素</u> $D \equiv \dfrac{d}{dt}$ は，$C_D(z) = z$ を c.f. とする S-C.L.Op. である．

$P(z)$ を n 次の多項式

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k z^k, \qquad A_n \neq 0$$

とすれば，$P(z)$ を c.f. にもつ S-C.L.Op. は

$$\Lambda = P(D) = \sum_{k=0}^{n} A_k D^k.$$

〔3°〕積分作用素 $\beta/(D-\alpha I)$

微分作用素 $(D-\alpha I)/\beta$ を用いて，微分方程式

$$\frac{1}{\beta}f'(t)-\frac{\alpha}{\beta}f(t)=g(t)$$

を解くことにより，$\beta/(D-\alpha I)$ は $(D-\alpha I)/\beta$ の逆作用素で，

$$\Lambda f(t)\equiv\beta/(D-\alpha I)\,f(t)=\beta\int^{t}e^{\alpha(t-s)}f(s)\,ds$$
$$=-\beta\int^{0}e^{\alpha u}\tau_{u}f(t)\,du$$

と表わされ，$C_{\Lambda}(z)=\beta/(z-\alpha)$ となることがわかる．ただし

$$(1.3)\qquad \int^{0}e^{\alpha u}\tau_{-u}f(t)\,du=-\int^{t}e^{\alpha(t-s)}f(s)\,ds$$
$$\equiv\begin{cases}\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha u}\tau_{-u}f(t)\,du=\int_{t}^{\infty}e^{\alpha(t-s)}f(s)\,ds, & (\mathcal{R}e\,\alpha>0)\\ -\int_{0}^{\infty}e^{\alpha u}\tau_{-u}f(t)\,du=\int_{-\infty}^{t}e^{\alpha(t-s)}f(s)\,ds, & (\mathcal{R}e\,\alpha<0).\end{cases}$$

〔4°〕Convolution transform

Hirschmann-Widder〔8〕によれば，任意の分布関数 K に対して，

$$\Lambda f(t)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)\,dK(s)$$

で定義される線型作用素 Λ は，

$$C_{\Lambda}(z)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}e^{-zt}\,dK(t)\equiv 1/E(-z)$$

を c.f. にもつ S-C.L.Op. であることがわかる．ここで，E は，Pòlya の entire関数のクラス $\mathcal{E}$ に属し，

$$E(z)=e^{-cz^{2}+bz}\prod_{k=1}^{\infty}(1-z/a_{k})e^{z/a_{k}},$$

$\{a_{k}\}$，b，c は実定数で，$c\geqq 0$，$\sum_{k=1}^{\infty}a_{k}^{2}<\infty$ をみたすものである．

[5°] <u>Riemann-Liouville 型</u>

(1) $C_\Lambda(z) = (z+\beta)^{-\alpha}$, α, $\beta > 0$

を c.f. にもつ S-C.L.Op. は

$$(1.4)\qquad \Lambda f(t) \equiv (D+\beta I)^{-\alpha} f(t) = 1/\Gamma(\alpha) \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{\alpha-1} e^{-\beta(t-s)} f(s)ds$$

$$= 1/\Gamma(\alpha) \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-\beta u} \tau_{-u} f(t)\, du.$$

(2) $C_\Lambda(z) = (z+\beta)^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, $\beta>0$

を c.f. にもつ S-C.L.Op. は

$$(1.5)\qquad \Lambda f(t) \equiv (D+\beta I)^{\alpha} f(t)$$

$$= 1/\Gamma(-\alpha) \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha-1} [f(t) - e^{-\beta(t-s)} f(s)] ds$$

$$= 1/\Gamma(-\alpha) \int_0^\infty u^{-\alpha-1} (I - e^{-\beta u} \tau_{-u}) f(t)\, du.$$

(3) $C_\Lambda(z) = z^{\alpha}$, $0 < \alpha < 1$

を c.f. にもつ S-C.L.Op. は

$$(1.6)\qquad \Lambda f(t) \equiv D^{\alpha} f(t) = 1/\Gamma(-\alpha) \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha-1} [f(t) - f(s)] ds$$

$$= 1/\Gamma(-\alpha) \int_0^\infty u^{-\alpha-1} (I - \tau_{-u}) f(t)\, du.$$

[6°] $C_\Lambda(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$, $z \in C$

を c.f. にもつ S-C.L.Op. は

$$(1.7)\qquad \Lambda f \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n D^n f = \sum_{n=0}^{\infty} A_n f^{(n)}.$$

<u>2. $\mathfrak{S}$の部分空間上のS-C.L.Op.の定義</u>

これから紹介することは，前節の最後の例[6°]を除けば，一応うまくゆくが，多重マルコフ性の中でも特に重要な，無

限重マルコフ性に関係する〔6°〕の無限階微分作用素の定義に無理がある。しかし，その克服の方向を知るためにも，報告者の結果を紹介する。

(1°) <u>クラスΛ_s</u>

最も基礎的で，これからの議論で重要な役割りを果たす，クラスΛ_sの定義から始めよう．

伊藤氏の定常超過程$\mathfrak{S}$上の<u>shift $\{T_t\}$</u>を，前節（F 2）の$\tau_t f(\cdot)=f(\cdot+t)$を用いて，任意の$x \in \mathfrak{S}$に対して

$$T_t x(\varphi) \equiv x(\tau_{-t}\varphi), \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

と定義する。ここで$\mathcal{S}$はR上の<u>急減少関数</u>の全体である。

<u>定義 2.1</u>　Kを前節例〔1°〕の$\tilde{\Lambda}_s$の定義に用いた有限個の点で飛躍する階段関数（1.1）とする，すなわち

$$K(t) = \sum_{t_n \leq t} k_n, \qquad k_n \in C.$$

このとき，（1.2）の$\Lambda \in \tilde{\Lambda}_s$に対応する$\mathfrak{S}$上のS-C.L.Op. Λを，任意の$x \in \mathfrak{S}$に対して

$$(2.1) \qquad \Lambda x(\varphi) \equiv \sum_n T_{t_n} x(\varphi) k_n = \sum_n x(\tau_{-t_n}\varphi) k_n, \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

で定義し，<u>$\mathfrak{S}$上のS-C.L.Op.</u>と呼ぶ．

普通の定常過程のクラス$\mathfrak{S}^0$については，任意の$x \in \mathfrak{S}^0$に対して，

$$(2.2) \qquad \Lambda x(t) \equiv \sum_n \tau_{t_n} x(t) k_n = \sum_n x(t+t_n) k_n, \quad (t \in R)$$

で定義し，<u>$\mathfrak{S}^0$上のS-C.L.Op.</u>と呼ぶ．

(2.1) や (2.2) の型のS-C.L.Op.の全体をクラス$\widetilde{\Lambda}_s$のS-C.L.Op.という. $\Lambda \in \Lambda_s$のc.f.は, 対応する$\Lambda \in \widetilde{\Lambda}_s$のc.f. C_Λとする.

次の補題が, $\mathfrak{S}$または$\mathfrak{S}^0$におけるS-C.L.Op.を定義し, その性質をしらべるとき, 重要な役割りを果たすものの1つである. (証明は省略する.)

補題 2.1　$x \in \mathfrak{S}$が, スペクトル表現

$$x(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda)\, Z_x(d\lambda), \qquad (\varphi \in \mathcal{S})$$

をもつときは, 任意の$\Lambda \in \Lambda_s$に対して, Λxは

$$\Lambda x(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda) C_\Lambda(i\lambda) Z_x(d\lambda), \qquad (\varphi \in \mathcal{S})$$

$$r_{\Lambda x}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda) |C_\Lambda(i\lambda)|^2 \mu_x(d\lambda), \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

とスペクトル表現される. ここで, $r_{\Lambda x}(\varphi)$はΛxの共分散超関数でμ_xはxのスペクトル測度, $(\mathcal{F}\varphi)(\lambda) \equiv 1/\sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} \varphi(t) dt$.

$x \in \mathfrak{S}^0$のときは

$$\Lambda x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} C_\Lambda(i\lambda) Z_x(d\lambda),$$

$$r_{\Lambda x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} |C_\Lambda(i\lambda)|^2 \mu_x(d\lambda).$$

(2°) クラスΛ

以後この報告を通じて, 次の表現や記号を用いることにする. $x \in \mathfrak{S}$のスペクトル表現と共分散超関数は

$$x(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda) Z_x(d\lambda), \quad (\varphi \in \mathcal{S})$$

$$r_x(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}\varphi)(\lambda)\mu_x(d\lambda),\quad (\varphi\in\mathcal{S});$$

$x\in\mathfrak{S}'$のときは

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}Z_x(d\lambda),\quad (t\in R),$$

$$r_x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}\mu_x(d\lambda),\quad (t\in R);$$

$Z_x(d\lambda)\equiv Z_x(d\lambda,\omega)$を$x$の直交彷徨測度，$\mu_x$を$x$のスペクトル測度という．

$$\mathbb{M}\equiv\{\mu;\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|^2\mu(d\lambda)<\infty,\ \forall\varphi\in\mathcal{S},\ \text{非負測度}\},$$

$$\mathbb{M}_k\equiv\{\mu;\int_{-\infty}^{\infty}\mu(d\lambda)/(1+\lambda^2)^k<\infty,\ \mu\in\mathbb{M}\},$$

$$\mathbb{L}^2(\mu;\mathcal{S})\equiv\{f;\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)f(\lambda)|^2\mu(d\lambda)<\infty,\ \forall\varphi\in\mathcal{S}\},$$

$$\mathbb{L}^2(\mu;k)\equiv\{f;\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2/(1+\lambda^2)^k\mu(d\lambda)<\infty\}.$$

$\mathfrak{S}$または$\mathfrak{S}'$におけるS-C.L.Op..を定義したいが，そのためには次の補題が基本的である．

補題 2.2　$x\in\mathfrak{S}$と$\{\Lambda_n\}\subset\mathbb{A}_s$に対して，極限

$$y(\varphi)\equiv\underset{n\to\infty}{l.i.m.}\Lambda_n x(\varphi),\quad (\varphi\in\mathcal{S})$$

が存在するための必要十分条件は，ある$C(i\lambda)\in\mathbb{L}^2(\mu_x;\mathcal{S})$が存在して，次式が成り立つことである：

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(\lambda)|^2|C_{\Lambda_n}(i\lambda)-C(i\lambda)|^2\mu_x(d\lambda)=0,\quad (\varphi\in\mathcal{S}).$$

このとき，$y\in\mathfrak{S}$で

$$y(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}\varphi)(\lambda)C_y(i\lambda)Z_x(d\lambda),\quad (\varphi\in\mathcal{S}),$$

$$r_y(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{F}\varphi)(\lambda)|C_y(i\lambda)|^2\mu_x(d\lambda),\quad (\varphi\in\mathcal{S})$$

が成り立つ．ただし，$C(i\lambda)$ と $C_y(i\lambda)$ とは，μ_x測度 0 の λ を除いて等しい．

この補題は，$\mathfrak{S}$ における S-C.L.Op. を次のように定義できることを示している．

<u>定義 2.2</u>　$\Lambda \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ の c.f. C_Λ が，$x \in \mathfrak{S}$ のスペクトル測度 μ_x に対して，$C_\Lambda(i\lambda) \in \mathbb{L}^2(\mu_x;\mathcal{S})$ をみたすとき，$\Lambda \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ に対応する，$\mathfrak{S}$ における S-C.L.Op. Λ を

$$(2.3)\qquad \Lambda x(\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda) C_\Lambda(i\lambda) Z_x(d\lambda), \qquad (\varphi \in \mathcal{S})$$

で定義し，<u>$\mathfrak{S}$ における S-C.L.Op.</u> と呼ぶ．

C_Λ が $x \in \mathfrak{S}^0$ のスペクトル測度 μ_x に対して，$C_\Lambda(i\lambda) \in \mathbb{L}^2(\mu_x;0)$ をみたすとき，$\mathfrak{S}^0$ における S-C.L.Op. Λ を

$$(2.4)\qquad \Lambda x(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} C_\Lambda(i\lambda) Z_x(d\lambda), \qquad (t \in R)$$

で定義し，<u>$\mathfrak{S}^0$ における S-C.L.Op.</u> と呼ぶ．

(2.3) や (2.4) で定義される S-C.L.Op. の全体を<u>クラス $\mathbf{\Lambda}$</u> の S-C.L.Op. といい，$\Lambda \in \mathbf{\Lambda}$ の c.f. は，対応する $\Lambda \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ の c.f. C_Λ とし，その<u>定義域</u>を $\mathcal{D}(\Lambda)$ で表わす．

補題 2.2 は，$\varphi \in \mathcal{S}$ ならば $\mathcal{F}\varphi \in \mathcal{S}$ と，$\Lambda_n x$ と y のスペクトル表現を用いて証明することができる．この補題は，上のようにして Λx の定義ができることを示しているばかりでなく，次の定理が成り立つことも示している．

<u>定理 2.1</u>　$\Lambda \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ が $\Lambda \in \mathbf{\Lambda}$ なるための必要十分条件は，Λ

の c.f. C_Λに対して，$C_\Lambda(i\lambda) \in L^2(\mu;\mathcal{B})$をみたす$\mu \in \mathbb{M}$が存在することである．

何故なら，任意の$\mu \in \mathbb{M}$に対して，μをスペクトル測度とする$x \in \mathfrak{S}$の存在が，Ito [9]によって示されているから．

<u>注意</u>　補題 2.2 と定義 2.2 からわかるように，$x \in \mathfrak{S}$に対してΛxとΓxが定義可能のとき，もし$C_\Lambda(i\lambda)$と$C_\Gamma(i\lambda)$とがμ_x測度 0 のλを除いて等しいならば，$\mathfrak{S}$の元としては$\Lambda x = \Gamma x$である．しかしわれわれは，$C_\Lambda(i\lambda)$と$C_\Gamma(i\lambda)$がμ_x測度 0 のλで異なったら，$\Lambda x \neq \Gamma x$と約束しよう．

§1 で挙げた$\tilde{\mathbb{A}}$の例のほとんどはまた$\mathbb{A}$に属する作用素の例となる．ただし，最後の例[6°]について言及したい．

Schwartz－超関数では，したがって伊藤－超（定常）過程$\mathfrak{S}$の意味でも，無限回微分可能性はいえないので，（1.7）の$\Lambda \in \tilde{\mathbb{A}}_s$に対応する$\Lambda \in \mathbb{A}$として，

$$(2.5) \qquad \Lambda x(\varphi) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{(n)}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A_n x(\varphi^{(n)})$$

は定義できない．しかしわれわれは定義 2.2 で，$C_\Lambda(i\lambda) \in L^2(\mu_x;\mathcal{B})$ならば，$\Lambda \in \tilde{\mathbb{A}}$に対応する$\Lambda \in \mathbb{A}$を（2.3）の形

$$\Lambda x(\varphi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda) C_\Lambda(i\lambda) Z_x(d\lambda)$$

で定義したが，この形では定義できる．さらに補題 2.2 は，

<u>定理 2.2</u>　$\Lambda \in \tilde{\mathbb{A}}$，$x \in \mathfrak{S}$に対して，$\Lambda x$が定義可能ならば，$\{\Lambda_n\} \subset \mathbb{A}_s$を適当に選んで

$$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\ \Lambda_n x(\varphi) = \Lambda x(\varphi), \qquad (\varphi \in \mathcal{S})$$

とできる.

ことを示している. したがって, $\Lambda \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n D^n$ に近づくような $\Lambda_n \in \mathbf{\Lambda}_s$ を選んで, 全体として $\Lambda = \sum_{n=0}^{\infty} A_n D^n$ を $\Lambda_n \in \mathbf{\Lambda}_s$ の極限として考えることは可能であろう. この2つの理由から, われわれは c.f. として $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \equiv C_\Lambda(z)$ をもつ $\Lambda \in \mathbf{\Lambda}$ を symbol 的に次のように書くことにしよう:

$$(2.6) \qquad \Lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{(n)}.$$

しかしこの解釈は苦るしいのである. 岡部氏は, 佐藤-超関数に相当する hyperprocesses を導入し, (2.6)の意味づけを行ない, 他の人は x のスペクトル表現を用いて hyperprocesses の意味での (2.6) の意味づけの試みもあるようだ. スペクトル表現を用いる方向での意味づけなら, 純非決定性を用いないで (2.6) の意味づけが行なえないだろうか? さらには定常性も仮定しないで, 一般の確率過程に対しても, (2.6)の意味づけが行なえないだろうか?

3. 確率関数方程式 $\Lambda y = x$

前節の終りに述べたような方向に研究を進めるとき起るであろう問題を摘出するために, 次の確率関数方程式を考える.

$$(3.1) \qquad \Lambda y = x.$$

この節では問題点が発散しないように，$x, y \in \mathfrak{S}$ または $\mathfrak{S}^0$ を仮定する．問題は①xを既知としたときの解yの形，②解の一意性，③ xとyが(3.1)をみたすとき，$\mathbb{L}^2(X;t)=\mathbb{L}^2(Y;t)$をみたすための条件を求めることにしぼって考える．ただし，$\mathbb{L}^2(X;t)$は，$\mathfrak{S}^0$では$\{x(s,\omega); s \leqq t, \omega \in \Omega\}$の張る2乗平均の意味での閉線型空間，$\mathfrak{S}$では$\mathcal{S}_t \equiv \{\varphi;\ \mathrm{car.}(\varphi) \in (-\infty, t], \varphi \in \mathcal{S}\}$とするとき，$\{x(\varphi,\omega); \varphi \in \mathcal{S}_t, \omega \in \Omega\}$の張る2乗平均の意味での閉線型空間である．

いま $N_\Lambda \equiv \{\lambda; C_\Lambda(i\lambda)=0, \lambda \in R\}$ とおく．このとき．

定理 3.1　(1)　$N_\Lambda = \phi$ のとき，

①もしΛ^{-1}が存在するならば　$y = \Lambda^{-1} x$.

②Λ^{-1}が存在しなくても，　$y(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda)/C_\Lambda(i\lambda)\, Z_x(d\lambda)$.
(一意)

(2)　$N_\Lambda \neq \phi$ ならば

$$y = y_0 + y_s.$$

ただし，　$y_s(\varphi) \equiv \int_{R-N_\Lambda} (\mathcal{F}\varphi)(\lambda)/C_\Lambda(i\lambda)\, Z_x(d\lambda)$,

y_0 は $\Lambda y = 0$ の解で，　$y_0 \perp y_s$.

$y, x \in \mathfrak{S}^0$のときも同様．

この証明も省略するが，(2)のとき$y_0 \perp y_s$となるのは，yが定常過程だからそのZ_yは直交術徨測度でなければならないことと，$Z_y = Z_{y_0} + Z_{y_s}$から出る結論であることを注意しておく．

さらに$\mathbb{A}_-$を過去だけに関係するS-C.L.Op.のクラスとすると，次の定理が成り立つ．（証明は省略する．）

<u>定理 3.2</u>　$\Lambda\in\mathbb{A}_-$ならば（3.1）の解yとxとの間には

$$\mathbb{L}^2(Y;t)\supset\mathbb{L}^2(X;t),\quad (t\in R)$$

が成り立つ．さらに$\Lambda^{-1}\in\mathbb{A}_-$が存在する（$\Lambda,\Lambda^{-1}\in\mathbb{A}_-$）ならば，（3.1）の解$y$（$=\Lambda^{-1}x$）は一意で

$$\mathbb{L}^2(Y;t)=\mathbb{L}^2(X;t),\quad (t\in R).$$

定理 3.1，(1) ②から，$\Lambda,\Lambda^{-1}\in\mathbb{A}_-$が必ずしも（3.1）の解$y$の一意性と$\mathbb{L}^2(Y;t)=\mathbb{L}^2(X;t)$の必要条件とはいえない（$x,y\in\mathfrak{S}$または$\mathfrak{S}^0$と限っているから）が，"$\Lambda,\Lambda^{-1}\in\mathbb{A}_-$"が成り立つ条件を求めることは重要な問題であることは理解いただけると思う．特に非定常の場合まで含めれば，この条件が後者の必要十分になることはほとんど明らかであろう．ここに，Λ^{-1}の定義を定義1.3の形で与えた意味がある．証明には準備がいるから（§1の例が重要な役割りを果たす）省略するが，次の定理が成り立つ．

<u>定理 3.3</u>　$\Lambda,\Lambda^{-1}\in\mathbb{A}_-$が成り立つための必要十分条件は，$C_\Lambda$の零点と極が（もし存在すれば）左半平面にあり，定義域が$\overline{\mathfrak{a}(\Lambda)}=\mathbb{C}$をみたすことである．

以上の結果をふまえて次に進む．

4. 方程式 $\Lambda x=\xi$ とその応用

ξ を白色雑音（white noise）とするとき，方程式

(4.1)　　$\Lambda x=\xi$,　　$\Lambda\in\mathbf{\Lambda}$

をとりあげる．この節では ①(4.1) をみたす x がクラス $\mathfrak{S}_0$（$\mu_x\in\mathbf{M}_0$ を意味する）に属する条件，② $\mathbb{L}^2(X;t)=\mathbb{L}^2(\Xi;t)$ の条件，③ x の過去，現在，未来の従属関係（マルコフ性を含む）などの問題を主として取扱う．

定理 4.1　(1) 方程式 (4.1) で $x\in\mathfrak{S}_0$ を解にもつ必要十分条件は，$N_\Lambda=\phi$ かつ $1/C_\Lambda(i\lambda)\in\mathbb{L}^2(m;0)$ が成り立つこと．ただし，m は $m(d\lambda)\equiv d\lambda$ であるような（普通の）測度．

(2) (4.1) の解 $x\in\mathfrak{S}_0$ に対応する $x\in\mathfrak{S}^0$ は，

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda t}/C_\Lambda(i\lambda)\,\tilde{\xi}(d\lambda),$$

ただし，$\tilde{\xi}$ は一様直交彷徨測度で，次式で与えられる：

$$\tilde{\xi}(S)=1/\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_S e^{i\lambda t}d\lambda\right)d\xi(t).$$

(3)　$\int_{-\infty}^{\infty}\log|C_\Lambda(i\lambda)|/(1+\lambda^2)\,d\lambda>-\infty$　ならば，x は純非決定的である．この条件は C_Λ が定理 3.3 の条件をみたすことと同値である（したがって $N_\Lambda=\phi$ を含む）．

(4)　(3) の条件と $1/C_\Lambda(i\lambda)\in\mathbb{L}^2(m;0)$ が成り立てば，方程式 (4.1) の $\mathfrak{S}^0$ に属する解 x が存在し，x は純非決定的で，$\mathbb{L}^2(X;t)=\mathbb{L}^2(\Xi;t)$ が成り立つ．

この証明も準備が大変だから省略する．

<u>定理 4.2</u>　方程式 (4.1) の Λ の c.f. C_Λ が次の条件をみたすとする.

(i) $C_\Lambda(z) = \sum_n A_n z^n \equiv A_0 \prod_k (1 - z/\alpha_k)$ (entire 関数).

(ii) $\mathcal{R}e\, \alpha_k < 0$ (すべての k に対して).

(iii) $1/C_\Lambda(i\lambda) \in \mathbb{L}^2(m;0)$.

このとき, 次の結果が成り立つ:

(1) $\Lambda^{-1} \in \mathbf{\Lambda}_-$ が存在して, $x = \Lambda^{-1}\xi \in \mathfrak{S}_0$.

(2) $\mathbb{L}^2(X;t) = \mathbb{L}^2(\Xi;t)$, $(t \in R)$

(3) ある関数 F が存在して $x(t) = \int_{-\infty}^{t} F(t-s)\, d\xi(s)$ と標準表現ができる. (実はこの表現が $x = \Lambda^{-1}\xi$.)

この定理の条件をみたす具体例を挙げよう.

〔1°〕 E を Pòlya クラス $\mathcal{E}$ に属する関数とする, すなわち

$$E(z) = e^{-cz^2+bz} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/a_k) e^{z/a_k},$$

$\{a_k\}$, b, c は実定数, $c \geqq 0$, $\sum_k a_k^{-2} < \infty$.

このとき, $C_\Lambda(z) \equiv E(-z)$ が定理 4.2 の 3 条件をみたす必要十分条件は, 次の条件をみたすことである:

(E) $\sum_k a_k^{-1} = -b$, $a_k \geqq 0$, $c = 0$.

<u>証明</u>　条件 (i), (ii) をみたすことは明らかだから条件 (iii) をみたすことを示せばよい. これは

$$E(z)/|z|^2 \longrightarrow \infty \quad (z \to \pm i\infty), \qquad E(-i\lambda) \neq 0$$

から証明できる.

[2°] Urbanik [7] の例によると，スペクトル密度関数

$$g_x(\lambda) = c \Big/ \prod_{k=1}^{\infty}(1+\lambda^2/a_k^2), \quad c>0, \quad 0<a_1<a_2<\cdots, \tag{4.2}$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} a_k/a_{k+1} < 1$$

をもつ定常過程はマルコフ性をもつことを示している。

(4.2) の $g_x(\lambda)$ をスペクトル密度関数にもつ $x \in \mathfrak{S}^0$ を確率関数方程式 (4.1) の立場から考えると，($c = 1/A_0^2$ とおくと)

$$C_1(z) = A_0 \prod_{k=1}^{\infty}(1 - z/a_k) \ , = A_0 \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z/a_k),$$

$$= A_0 \prod_{k=1}^{\infty}(1 \pm z/a_k) \quad (\pm \text{は} + \text{か} - \text{かの何れか}),$$

の3通りの場合が考えられる。しかし定理4.2の3条件をみたす場合は，第2の場合，すなわち条件

$$(\mathrm{U}) \quad C_1(z) = A_0 \prod_{k=1}^{\infty}(1 + z/a_k), \ A_0 \in R, \quad 0<a_1<a_2<\cdots,$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} a_k/a_{k+1} < 1$$

をみたす場合であることがわかる。

<u>注意</u> 定理3.3の条件は，方程式 (4.1) の解 x を非定常過程にまで拡げて考えるとき，(非定常部分を定常部分と直交すると仮定すれば) $t \to \infty$ のとき，非定常部分 $\to 0$ を保証する条件でもある。また多重マルコフ性の条件として，例えば §3 や §4 で少し触れたように，C_1 の零点と極の分布状態が関係してくることは明らかだから，この種の条件も求められたら面白いと思う。

文　献

〔1〕 Dym, H. and McKean Jr., H. P. Application of de Brange spaces of integral functions to the prediction of stationary Gaussian processes, Illinois J. Math., 14 (1970), 299-343.

〔2〕 Hida, T. Canonical representations of Gaussian processes and their applications, Mem. Coll. Sci. Kyôto Univ., 33 (1960), 109-155.

〔3〕 Levinson, N. and McKean Jr., H. P. Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise, Acta Math., 112 (1964), 99-143.

〔4〕 Seguchi, T. Shift-commutative linear operators and stationary processes, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser. A, 23 (1969), 106-155.

〔5〕 ―――――― An application of shift-commutative linear operators to linear automatic control systems with randomness, ibid, 24 (1970), 120-145.

〔6〕 ―――――― Certain operators of Riemann-Liouville type and stationary processes, Math. Rep. Coll. General Education, Kyushu Univ., 7 (1970), 23-35.

〔7〕 Urbanik, K. Generalized stationary Gaussian processes of Markovian charactor, Studia Math., 21 (1962), 261-282.

〔8〕 Hirschmann, I. I. and Widder, D. V. The convolution transforms, Princeton Univ. Press.

〔9〕 Ito, K. Stationary random distributions, Mem. Fac. Sci. Univ. Kyoto, 28 (1953), 209-223.